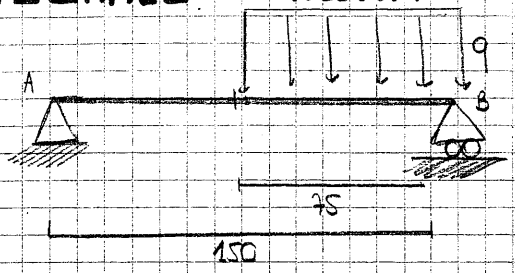
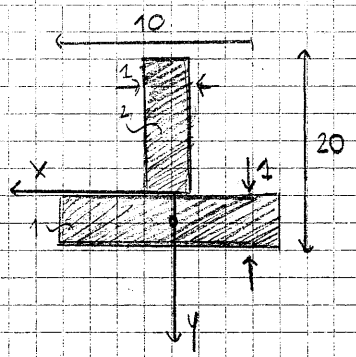
INTEGRALE di MOHR ✓





MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Calcolare lo spostamento in mm nella sezione di mezzeria.

$E = 206$ GPa $\quad q = 30$ N/mm

Devo calcolare J_x di tutta la sezione a T:

① Calcolo i baricentri delle sole sezioni della T.

$G_1 = (0; 0,5) \qquad G_2 = (0; 10.5)$

② Calcolo il baricentro globale della T:

$X_G = 0$

$$Y_G = \frac{y_{G1} \cdot A_1 + y_{G2} \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0.5 \cdot 10 + 10.5 \cdot 19}{10 + 19} = 7\,mm \longrightarrow G = (0; 7)$$

③ Per l'integrale di Mohr è necessario solo J_x, che mi calcolo facendo:

$$J_{x1} = \frac{10 \cdot 1^3}{12} = 0.8\,mm^4 \qquad J_{x2} = \frac{1 \cdot 19^3}{12} = 571\,mm^4$$

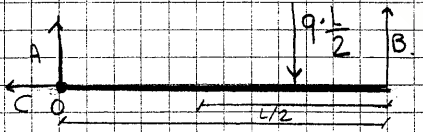
④ La formula finale del J_x è data da:

$$J_x = (y_G - y_{G1})^2 \cdot A_1 + (y_G - y_{G2})^2 \cdot A_2 + J_{x1} + J_{x2}$$

$$J_x = (7 - 0.5)^2 \cdot 10 + (7 - 10.5)^2 \cdot 19 + 0.8 + 571.6 = 1228\,mm^4$$

Quindi in conclusione: $J_x = 1228\,mm^4$.

Sostituisco i vincoli con le reazioni, e me le calcolo imponendo l'equilibrio:



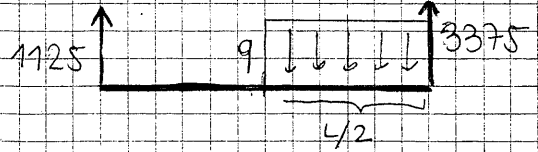
$$A + B = q\frac{L}{2} \qquad C = 0$$

$$A) \quad +B \cdot L - q\frac{L}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{4}\right) = 0$$

$$BL = q\frac{L}{2} \cdot 112.5 \longrightarrow B = \frac{506.250}{L} = 3375\,N$$

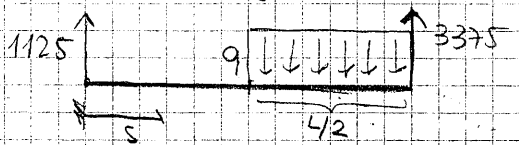
$$A = q\frac{L}{2} - B = 1125\,N$$

Quindi l'asta è soggetta a:



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

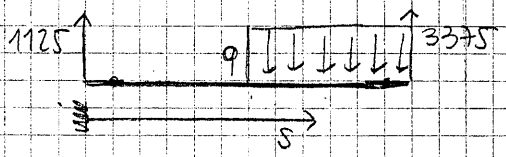
Calcolo M_x in modo analitico; questo varia in funzione dell'ascissa curvilinea s, quindi sarà $M_x(s)$.



- $0 < s < L/2$

$$M_x(s) = 3375 \cdot (L-s) - q\frac{L}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}L - s\right) = +1125 \cdot s$$

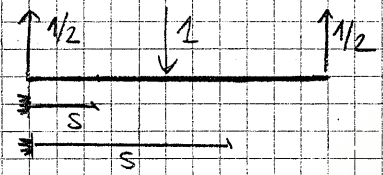
- $\frac{L}{2} < s < L$



$$M_x(s) = 3375(L-s) - q(L-s)\cdot\frac{(L-s)}{2} =$$

$$= 3375(L-s) - \frac{q(L-s)^2}{2}$$

Il <u>sistema ausiliario</u>; lo chiamo mettendo un carico unitario nel punto in cui mi interessa sapere lo spostamento, eliminando tutti i carichi e lasciando solo quelle le reazioni vincolari. che vanno ricalcolate considerando il carico unitario.



$0 < s < L/2$

$$M_{x1}(s) = -\left(-\frac{1}{2}\cdot s\right) = +\frac{s}{2}$$

(Quando ruoto e calcolo il momento dato dalla forza INCOGNITA)

$L/2 < s < L$

$$M_{x1}(s) = \frac{1}{2}(L-s)$$

Posso quindi svolgere l'integrale:

$$\delta = \int_0^{L/2} \frac{M_{x1}(s)\cdot M_x(s)}{EJ_x} ds + \int_{L/2}^{L} \frac{M_{x1}(s)\cdot M_x(s)}{EJ_x} ds.$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\delta = \int_0^{L/2} \frac{1125\cdot s\cdot s}{2EJ_x} ds + \int_{L/2}^{L} \frac{3375(L-s) - q(L-s)^2]\cdot(L-s)}{4\cdot 2\cdot EJ_x} ds =$$

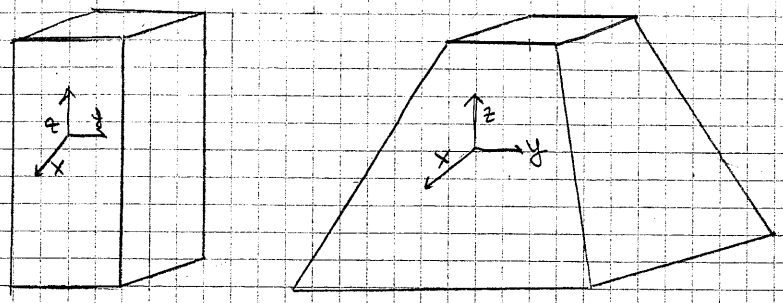
$$= \frac{1125}{2EJ_x}\int_0^{L/2} s^2 ds + \int_{L/2}^{L}\left(\frac{3375(L-s)^2}{4EJ_x} - \frac{q(L-s)^3}{4EJ_x}\right) ds =$$

$$= \frac{2562}{EJ_x}\cdot\frac{L^3}{24} + \frac{84375}{EJ_x}\int_{L/2}^{L} L^2 + s^2 - 2Ls - \frac{15}{EJ_x}\int_{L/2}^{L}(L-s)^3 ds =$$

$$= \frac{23.4}{EJ_x} + \frac{84375}{EJ_x}\cdot\frac{L^3}{24} - \frac{15}{EJ_x}\cdot\frac{L^4}{64} = \frac{23.4}{EJ_x}L^3 + \frac{35.15}{EJ_x}L^3 - \frac{0.23}{EJ_x}L^4 =$$

$$= \frac{L^3}{EJ_x}(58.5 - 0.2L)$$

ES.1 COMPITO



Quale delle seguenti deformazione descrive quella della FIGURA?

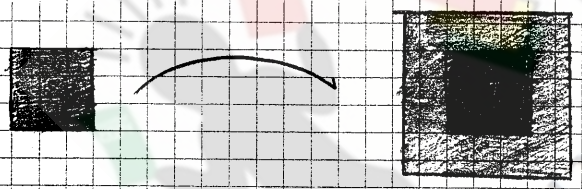
- (a) $\varepsilon_{xy} = 0$
- (b) $\varepsilon_{xx} = 5z$
- (c) $\varepsilon_{yy} = 5z + 0.4$
- (d) $\varepsilon_{xz} = -5z$
- (e) $\varepsilon_{yz} = 4z^2$
- (f) $\varepsilon_{zz} = 0.5$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

SPIEGAZIONE delle varie POSSIBILITÀ:

(a) $\varepsilon_{xy} = 0$

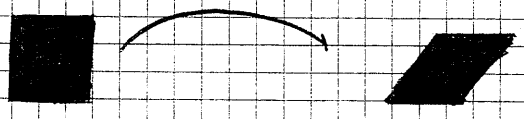
Devo fare cioè un taglio su $z = 0$. E ottengo:



Devo cioè guardare la deformazione ANGOLARE sul piano xy: se l'angolo non si è andato a modificare, la deformazione è nulla.

Nel nostro caso gli angoli tra x e y non sono cambiati: $\varepsilon_{xy} = 0$ corretta.

Se ad esempio avessi avuto una deformazione del tipo:



In questo caso risultava $\varepsilon_{xy} \neq 0$

(b) $\varepsilon_{xx} = 5z$

Devo andare a vedere come è composta la deformazione lungo x.

- Per $z = 0$ ottengo $\varepsilon_{xx} = 0$ cioè in $z = 0$ non c'è stata deformazione mentre nel nostro caso c'è stata in $z = 0$ una deformazione lungo x.

Già questo ci fa dire che l'opzione (b) è sbagliata.

E se avessi avuto un termine costante?

Ad esempio:

* $\varepsilon_{xx} = 5z + 0.3$: per $z=0$ $\varepsilon_{xx}=0.3$ e andava bene.
  Poi però per $z>0$ il solido continuava ad allargarsi
  per $z<0$ il solido si riduceva

Quindi per essere corretta, doveva essere del tipo:

$$\varepsilon_{xx} = -5z + 0.3$$

© $\varepsilon_{yy} = 5z^2 + 0.4$

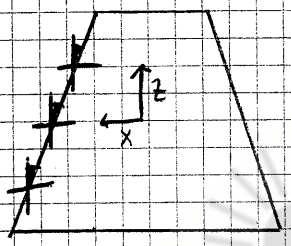
Devo guardare la deformazione lungo y.

Per $z=0 \rightarrow \varepsilon_{yy} = 0.4$ cioè si allarga e questo è verificato.

Poi sia per $z>0$ che per $z<0$ il solido all'aumentare di z, lungo y continua ad allargarsi. E QUESTO NON È VERIFICATO NEL NOSTRO CASO.

ⓓ $\varepsilon_{xz} = -5z$

devo vedere come varia, dopo la deformazione, l'angolo tra x e z.



⚠ **Devo guardare l'angolo dalla parte degli assi positivi**

Ok, se lo vado a guardare l'angolo, questo non varia

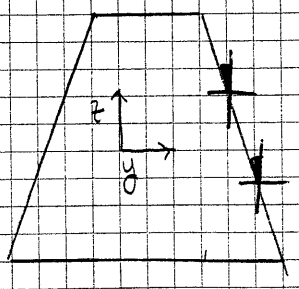
L'espressione $\varepsilon_{xz} = -5z$ ci dice che per $z=0$ l'angolo relativo tra prima e dopo la deformazione sarebbe lo stesso (e questo già non è vero)

Poi per $z>0$ l'angolo sarebbe andato ad aprirsi rispetto a 90°, per $z<0$ l'angolo sarebbe andato a chiudersi

ⓔ $\varepsilon_{zz} = 0.5$

Ci indica se il solido si allunga o si accorcia, cioè come varia la sua altezza, ma nel nostro caso l'h rimane costante.

ⓕ $\varepsilon_{yz} = 4z^2$



Anche questo ci dice che per $z=0$ l'angolo rimane costante, e questo già non va bene.

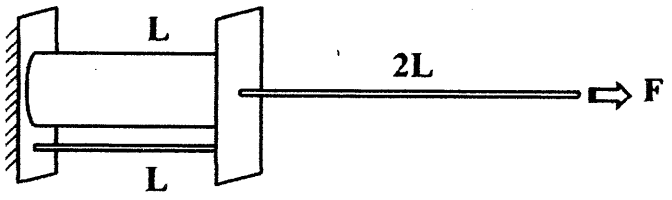
Se ci aggiungo ad esempio un termine noto come:

$$\varepsilon_{yz} = 4z^2 + 0.2$$

Per $z=0$ ho $\varepsilon_{yz} = 0.2$ e questo potrebbe andare, ma poi per $z>0$ l'angolo aumenterebbe sempre, invece qui resta sempre costante.

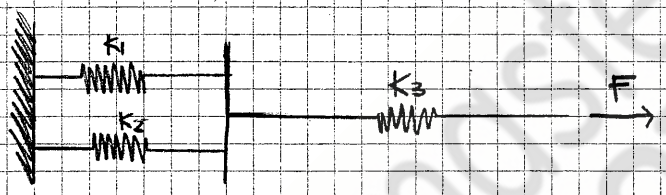
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

4) Siano dati tre cilindri di lunghezza caratteristica L=300 mm, quelli piccoli realizzati in lega di alluminio (E=9·10⁴ MPa) ed aventi diametro pari a 0.21 mm e quelli grandi in gomma elastomerica (E=80 MPa) con diametro pari a 15 mm. Supponendo che entrambi i materiali abbiano un comportamento lineare elastico, che i tre cilindri siano uniti come in figura, e che essi siano sollecitati all'estremità con una forza pari a 13 N, calcolare l'energia elastica immagazzinata nell'intera struttura.



E (Joules) = 0.0176 J

La struttura si può vedere anche come un sistema di molle in serie e in parallelo così fatto:



Per ricavarmi le K uso la formula:

$$K = \frac{E \cdot A}{L} \quad \text{dove} \quad A = \frac{\Phi^2 \pi}{4}$$

- $A_1 = 176.7\ mm^2$ → $K_1 = 47.1\ N/mm$
- $A_2 = 0.035\ mm^2$ → $K_2 = 10.5\ N/mm$

$$K_3 = \frac{K_2}{2} = 5.25\ N/mm$$

Ora mi devo ricavare la K_{eq}.

K_1 e K_2 sono in parallelo:

$$K_{//} = K_1 + K_2 = 57.6\ N/mm$$

$K_{//}$ e K_3 sono in serie:

$$K_{eq} = \left(\frac{1}{K_{//}} + \frac{1}{K_3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{57.6} + \frac{1}{5.25}\right)^{-1} = 4.81\ N/mm$$

Per calcolarmi l'energia elastica immagazzinata:

$$\Delta U = E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{K_{eq}} = \frac{1}{2}\frac{(13\ N)^2}{4.81\ N/mm} = 17.6\ N\ mm.$$

Devo portarlo in Joule (moltiplico per 10^{-3}: poiché $J = N\ m$):

$$\Delta U = 0.0176\ J$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745